Diario delle lezioni
Corso di Analisi per Fisica
(canale D-K)

Giulio Galise*

24 settembre 2019. Il campo ordinato dei reali $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$: assiomi relativi alle operazioni e all'ordinamento. Conseguenze: alcune usuali regole di operazioni. $\sqrt{2}$ non è razionale. Proprietà di continuità di $\mathbb{R}$: assioma di Dedekind. $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind.

25 settembre 2019. Maggioranti e minoranti, massimo e minimo di un insieme. Insiemi limitati, intervalli. Estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali: teorema di esistenza (solo nel caso del sup), proprietà e caratterizzazioni.

26 settembre 2019. Proprietà di Archimede, densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Valore assoluto (o modulo) di un numero reale: definizione, proprietà, grafico di $f(x) = |x|$. Intorni.

30 settembre 2019. Generalità sulle funzioni: dominio codominio, immagine, controimmagine, grafico. Funzioni pari e dispari, limitate e non limitate, periodiche. Richiami sulle funzioni trigonometriche. Funzione composta e funzione inversa (locale e globale), funzioni monotone. Le funzioni trigonometriche inverse.

1 ottobre 2019. Esistenza di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$, esistenza della radice n-esima $\sqrt[n]{x}$ (cenni). Funzioni $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Funzioni potenza di esponente reale $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, esponenziale e logaritmo. Grafici.
Successione numeriche: introduzione e definizione di limite.

2 ottobre 2019. Successioni convergenti e limitate. Unicità del limite. Teorema dei carabinieri e applicazioni: calcolo del limite per le successioni $a_n = \sqrt[n]{x}$, con $x > 0$, $a_n = \sqrt[n]{n}$.

8 ottobre 2019. Calcolo del limite per le successioni $a_n = \frac{n!}{n^x}$, $a_n = \frac{x^n}{n!}$ con $x \in \mathbb{R}$. Successioni divergenti. Operazioni con i limiti (dim. del caso $a_n b_n \to ab$). Forme indeterminate $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$. Introduzione alle successioni monotone.

10 ottobre 2019. Teorema di regolarità delle successioni monotone. Forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞. La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ed il numero di Nepero "e". Successioni estratte, $a_n \to L \Rightarrow a_{k_n} \to L$. Non esistenza del limite per $a_n = (-1)^n$, $a_n = \sin(n\frac{\pi}{4})$.

15 ottobre 2019. Il teorema di Bolzano-Weierstrass. Successioni di Cauchy, criterio di Cauchy.

*email: galise@mat.uniroma1.it

17 ottobre 2019. Serie numeriche. Serie geometrica e rappresentazione dei numeri decimali periodici. Le serie telescopiche. La serie armonica.

22 ottobre 2019. Serie numeriche: condizione necessaria di convergenza, serie a termini non negativi, criteri di confronto, confronto asintotico, radice. La serie armonica generalizzata.

24 ottobre 2019. Serie a termini positivi: criterio del rapporto. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz. Serie a termine di segno variabile: convergenza assoluta.

29 ottobre 2019. Punti di accumulazioni in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e insieme derivato. Definizione generale di limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, x_0, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Studio dei vari casi ($x_0, L$ finiti ed infiniti), interpreatazione geometrica ed esempi.

31 ottobre 2019. Teorema ponte, non esitenza del limite mediante il teorema ponte (es. $\big(\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})\big)$). Unicità del limite, operazioni (somma, prodotto, quoziente) e forme indeterminate, teorema dei carabinieri. Limiti di funzioni composte. Limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

5 novembre 2019. Limiti destro e sinistro. Limiti di funzioni monotone. Introduzione alla continuità: definizioni, esempi e controesempi, algebra delle funzioni continue (somma, prodotto, quoziente...).

7 novembre 2019. Continuità funzioni composte. Continuità destra e sinistra. Teoremi degli zeri, dei valori intermedi, di Weierstrass.

15 novembre 2019. Primo esonero.

19 novembre 2019. Introduzione al calcolo differenziale: definizione di derivata, interpretazione geometrica (problema delle tangenti) e cinematica (velocità istantanea), calcolo di derivate mediante la definizione: (x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, a^x). Derivate destra e sinistra, non derivabilità della funzione $f(x) = |x|$ in zero. Continuità delle funzioni derivabili, algebra delle derivate.

21 novembre 2019. Derivata funzione composta, esempi vari, derivata di $f(x) = x^\alpha$. Derivata della funzione inversa, derivate funzioni trigonometriche inverse.

22 novembre 2019. Teorema di Fermat (condizione necessaria affinchè una funzione derivabile ammetta un estremo locale in un punto interno al dominio). Teoremi di Rolle, Cauchy (*senza dim.*), Lagrange. Conseguenze del teorema di Lagrange: test di monotoni, caratterizzazione funzioni costanti in un intervallo. Esempi e controesempi.

26 novembre 2019. Conseguenze del teorema di Lagrange: convergenza serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in (1, 2)$, test di riconoscimento punti stazionari (con derivate

prime e seconde.)
Il teorema di Cauchy (senza dim.), i teoremi di de L'Hôpital (dimostrazione del caso "$\frac{0}{0}$").
Applicazioni: calcolo di limiti e gerarchia degli ordini di infinito ($\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to 0^+} x^\beta\,|\log x|^\alpha = 0$ con $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$).

28 novembre 2019. Funzioni convesse: definizione, interpretazione geometrica, esempi. Caratterizzazioni funzioni convesse derivabili (f convessa $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\Leftrightarrow f'$ crescente) e 2 volte derivabili (f convessa $\Leftrightarrow f'' \geq 0$).
Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Studio qualitativo del grafico di funzione. Esempio: $f(x) = x - 2\arctan x$.

3 dicembre 2019. Approssimazione di funzioni mediante polinomi, la formula di Taylor: resto di Peano (o piccolo), polinomi di Taylor di e^x, $\sin x, \cos x, \log(1 + x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$. Calcolo di limiti mediante la formula di Taylor.

5 dicembre 2019. Polinomi di Taylor di $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = \tan x$. Calcolo di limiti. Formula di Taylor con resto di Lagrange (*senza dim.*) Applicazioni: e è irrazionale, calcolo delle prime due cifre di e.

10 dicembre 2019. Integrale di Riemann per funzioni limitate su intervalli chiusi e limitati $[a, b]$: suddivisioni di $[a, b]$, somme integrali superiori ed inferiori. Proprietà di monotonia delle somme integrali rispetto alla relazione di inclusione tra suddivisioni. Definizione di integrabilità, classe $\mathcal{R}(a, b)$ delle funzioni Riemann-integrabili nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Calcolo (mediante la definizione) di $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$, esempio di funzione non integrabile (la funzione caratteristica dei razionali).

17 dicembre 2019. Significato geometrico dell'integrale (area del sottografico). Criterio di integrabilità. Classi di funzioni integrabili. Funzioni monotone, funzioni continue (dim. nel caso Lipschitz). Proprietà di monotonia dell'integrale (senza dim.).

18 dicembre 2019 (recupero del 13 dicembre). Proprietà dell'integrale: linearità e additività rispetto all'intervallo di integrazione (senza dim). Teorema della media integrale. Funzione integrale: Lipschitzianità e teorema fondamentale del calcolo integrale. Formula fondamentale del calcolo integrale. Primitive ed integrale indefinito. Integrali immediati.

7 gennaio 2020. Integrali impropri. Criteri di convergenza: confronto, assoluta convergenza (senza dim.). Esempi vari, in particolare: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$, $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$.

Riferimenti bibliografici

[1] E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri.

[2] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli.

[3] C. Mascia, L. Lamberti, *Note di base di Analisi Matematica*, dispense.